RELACIONES DE RECURRENCIA

Definiciones

Relación de recurrencia o recursiva para la sucesión $\{ a_n \}_{n \in \mathrm{N}}$ es una expresión que relaciona el término general de la sucesión a_n con uno o más de los términos precedentes $a_k , \forall\, k \leq n$.

Los valores de los términos necesarios para empezar a calcular se llaman condiciones iniciales.

Ejemplos

1) *Sucesiones geométricas*

$$a_n = r\, a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_n = r^{\,n-1}\, a_1$$

ejemplo: $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$

2) *Sucesiones aritméticas*

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_1 + (n-1)\, d$$

ejemplo: $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \ldots\}$

3) Sea la relación recursiva

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \qquad \forall\, n \geq 3 \qquad \text{y} \qquad a_1 = 3\ ,\ \ a_2 = 5$$

entonces $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}} = \{\ 3,\ 5,\ 2,\ -3,\ -5,\ -2,\ 3,\ 5\ \ldots\}$

es una sucesión que satisface la relación recursiva.

4) La sucesión $\{a_n = 3\, n\}_{n \in \mathrm{N}}$ es solución de la relación recursiva

$$a_n = 2\, a_{n-1} - a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 3$$

5) Una persona deposita 10.000 € en una cuenta bancaria que le proporciona un interés anual del 3%.
Si los intereses se abonan en la misma cuenta,
¿cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de 20 años?

Solución:

Sea a_n el saldo de la cuenta una vez transcurridos n años,

entonces la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ satisface la relación recursiva

$$a_n = a_{n-1} + 0{,}03\ a_{n-1} = 1{,}03\ a_{n-1}\ ,\ \forall\ n \geq 1$$

$$a_0 = 10.000\ €$$

por tanto $\boxed{a_n = (1{,}03)^n\ a_0}$ $\Rightarrow$ $a_{20} = 18.061{,}11\ €$

Definiciones recursivas

Ejemplo

Sean n rectas en el plano, de manera que cada recta corta a las anteriores y no hay tres rectas coincidentes en el mismo punto,

1) ¿cuántas regiones definen?

solución:
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n, \quad n \geq 2 \end{cases}$$
definición recursiva

2) ¿cuántas regiones infinitas definen?

solución:
$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = b_{n-1} + 2, \quad n \geq 2 \end{cases}$$
definición recursiva

Definición

Relación de recurrencia **lineal de orden k** es una relación de la forma

$$\boxed{a_n = c_1(n)\,a_{n-1} + c_2(n)\,a_{n-2} + \cdots + c_k(n)\,a_{n-k} + g(n)}$$

donde $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$c_i : \mathbb{N} \to \Re, \qquad g : \mathbb{N} \to \Re$$

Si $g(n) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces es una **relación homogénea.**

Recurrencias lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$\boxed{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}}$$

$$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_k$$

polinomio característico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

raíces características son las raíces del polinomio característico

Teorema

1. α es raíz del polinomio característico

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

si y sólo si $\boxed{\alpha^n}$ es solución de la relación de recurrencia

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

Demostración

1. α es raíz de $p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^k - c_1\alpha^{k-1} - c_2\alpha^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^n = \alpha^{n-k}\alpha^k = c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \cdots + c_k\alpha^{n-k}$$

$\Leftrightarrow$ α^n es solución de la relación de recurrencia

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \cdots + c_k\, a_{n-k}$$

Teorema

2. Si α es raíz con multiplicidad $r > 1$ del polinomio

$$p(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k$$

entonces $\boxed{\{\, \alpha^n,\ n\,\alpha^n,\ n^2\,\alpha^n,\ \ldots,\ n^{r-1}\,\alpha^n \,\}}$

son soluciones de la relación de recurrencia

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \cdots + c_k\, a_{n-k}$$

Teorema

3. Si $x_n,\ y_n$ son soluciones de la relación de recurrencia

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + \cdots + c_k\, a_{n-k}$$

entonces $\boxed{\{\, A\, x_n + B\, y_n \ , \quad \forall\, A, B \in \Re \,\}}$

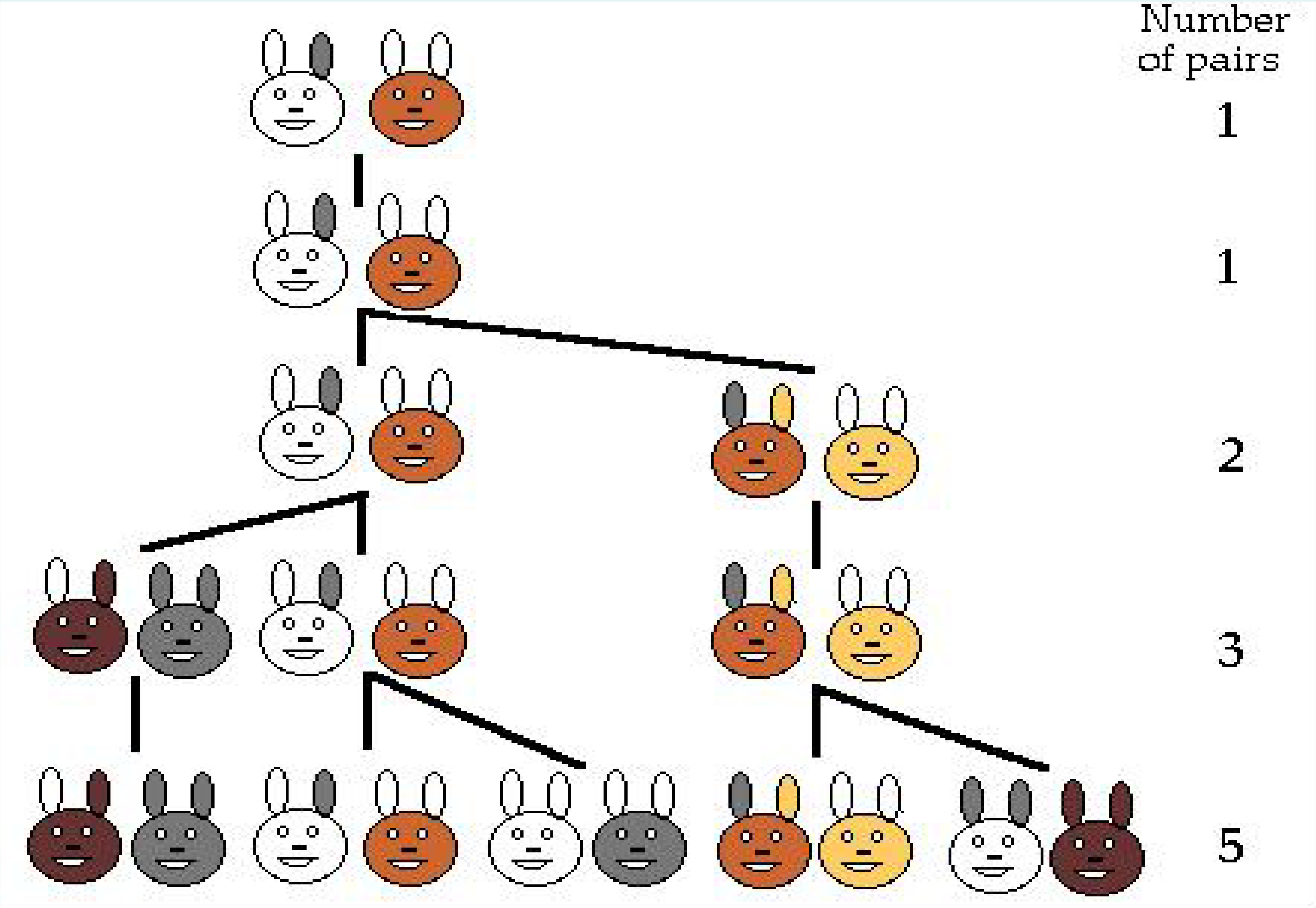
son soluciones de la misma recurrencia.

Ejemplo: Sucesión de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175 – 1250) en "*Liber Abaci*".

Se tiene una pareja de conejos, macho y hembra, recién nacidos; al final del segundo mes y de meses sucesivos, cada hembra da a luz una pareja de conejos, macho y hembra.

¿Cuántas parejas de conejos habrá al final de n meses?



http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

A : "recién nacidos" B : "jóvenes" C : "adultos"

fin 1º mes	A	$a_1 = 1$
fin 2º mes	B	$a_2 = 1$
fin 3º mes	C – A	$a_3 = 2$
fin 4º mes	C – B – A	$a_4 = 3$
fin 5º mes	C – C – B – A – A	$a_5 = 5$
fin 6º mes	C – C – C – B – B – A – A – A	$a_6 = 8$

Si a_n es el número de parejas de conejos al fin del mes n, entonces

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

- La sucesión de Fibonacci $\{ a_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica la recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(x) = x^2 - x - 1$

cuyas raíces son

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi = 1{,}618033 \quad \ldots \\ \beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\phi} = -0{,}618033 \quad \ldots \end{cases}$$

entonces la solución general de la recurrencia es

$$a_n = A\alpha^n + B\beta^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

donde $A, B \in \Re$ deben cumplir las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_1 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ a_2 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, la solución con las condiciones iniciales es

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Ejemplo: Sucesión de Édouard Lucas (1842 – 1891)

• En *"Investigaciones sobre varias obras de Leonardo de Pisa y sobre diversos temas de aritmética superior"* (1877), denominó a la sucesión anterior, sucesión de Fibonacci.

- Inventó el juego de las Torres de Hanoi.
- *"Récréations mathématiques"*

  (artículos publicados 1882 –1894)

- La sucesión de Édouard Lucas verifica la recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_1 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ a_2 = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 1, B = 1$$

$$\boxed{a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Ejemplos

1) Se considera la recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 20 \\ a_n = 8\, a_{n-1} - 16\, a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(x) = x^2 - 8x + 16$

cuya raíz es $\alpha = 4$ doble

entonces la solución general es

$$\boxed{a_n = (A + B\, n)\, 4^n}$$

donde $A, B \in \Re$ deben cumplir las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_1 = 4A + 4B = 1 \\ a_2 = 16A + 32B = 20 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{3}{4}, B = 1$$

2) Se considera la recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \\ a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(x) = x^2 + 1$

cuyas raíces son $\alpha = i$, $\beta = -i$

entonces la solución general es

$$\boxed{a_n = Ai^n + B(-i)^n}$$

donde $A, B \in \Re$ deben cumplir las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_1 = Ai - Bi = 2 \\ a_2 = -A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -i,\ B = i$$

Por lo tanto,

$$\boxed{a_n = -i^{(n+1)} - (-i)^{(n+1)} = -2\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}\right)}$$

considerando que

$$i^n = e^{i\frac{\pi}{2}n} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)n + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)n$$

$$(-i)^n = e^{-i\frac{\pi}{2}n} = \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)^n = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)n - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)n$$

3) Sea a_n el número de palabras de longitud n con las cifras $\{0, 1, 2, ..., 9\}$ que tienen un número par de ceros consecutivos.

Hallar una relación de recurrencia para calcular a_n.

- Se añade una cifra distinta de 0 a una cadena válida de a_{n-1} ó se añade un 00 a una cadena válida de a_{n-2} .

Entonces a_n verifica la recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_2 = 9^2 + 1 \\ a_n = 9a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

El polinomio característico es $p(x) = x^2 - 9x - 1$

cuyas raíces son

$$\alpha = \frac{9+\sqrt{85}}{2}, \quad \beta = \frac{9-\sqrt{85}}{2}$$

entonces la solución general de la recurrencia es

$$\boxed{a_n = A\left(\frac{9+\sqrt{85}}{2}\right)^n + B\left(\frac{9-\sqrt{85}}{2}\right)^n}$$

donde $A, B \in \Re$ deben cumplir las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_1 = A\alpha + B\beta = 9 \\ a_2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = 82 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{9\sqrt{85}}{170}, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{9\sqrt{85}}{170}$$

4) Un niño tiene n monedas iguales que quiere gastar en días sucesivos.

Se sabe que una bolsa de palomitas cuesta 1 moneda, un paquete de caramelos cuesta 2 monedas y un paquete de chicles cuesta 2 monedas.

¿De cuántas formas puede efectuar el gasto de las n monedas, teniendo en cuenta el orden de los días?

Sea a_n el número de formas distintas de gastar n monedas.

$n = 1$ moneda	p				1 forma
$n = 2$ monedas	pp	c	ch		3 formas
$n = 3$ monedas	ppp	cp	$ch\ p$		
		pc	$p\ ch$		5 formas
$n = 4$ monedas	$pppp$	cpp	$ch\ pp$		
		pcp	$p\ ch\ p$		
		ppc	$c\ c$	$ch\ \ c$	
		$pp\ ch$	$c\ ch$	$ch\ \ ch$	11 formas

- Se añade p al final de a_{n-1} ó se añade c ó ch al final de a_{n-2}

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

- El polinomio característico es $p(x) = x^2 - x - 2$

cuyas raíces son $\alpha = -1$, $\beta = 2$

entonces la solución general es $\boxed{a_n = A\,(-1)^n + B\,2^n}$

donde $A, B \in \Re$ deben cumplir las condiciones iniciales

$$\begin{cases} a_1 = -A + 2B = 1 \\ a_2 = A + 4B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}$$

Recurrencias lineales no homogéneas con coeficientes constantes

$$\boxed{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)}$$

- Una solución $P(n)$ de la ecuación no homogénea anterior es una solución particular cuando no se tienen en cuenta las condiciones iniciales.

- La solución particular $P(n)$ se obtiene de la siguiente forma:

1. si $g(n)$ es un polinomio de grado r

   entonces $P(n)$ es un polinomio de grado $\geq r$.

2. si $g(n)$ es un polinomio de grado r y $c_1 + \ldots + c_k = 1$

   entonces $P(n)$ es un polinomio de grado $\geq r + 1$.

3. si $g(n) = a \, . \, b^n$ con $a, b \in \Re$ y

   ✓ b no es raíz del polinomio característico, $P(n) = c \, . \, b^n$

   ✓ b es raíz del polinomio característico, de multiplicidad r, entonces $P(n) = c \; n^r \; b^n$

- La solución general de la ecuación lineal no homogénea se obtiene de la siguiente forma:

1. se calcula una solución general de la ecuación homogénea

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

2. se calcula una solución particular $P(n)$ de la ecuación

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)$$

3. la suma de ambas soluciones es una solución general de la ecuación $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + g(n)$
4. se obtiene la solución correspondiente a las condiciones iniciales

Ejemplos

1) Sea la recurrencia lineal no homogénea

$$\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6n^2 + 26n - 25 \end{cases}$$

- La relación de recurrencia lineal homogénea $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

  tiene como polinomio característico $f(x) = x^2 - x - 6$

  cuyas raíces son $\alpha = -2,\ \beta = 3$

  entonces la solución general de la recurrencia homogénea es

$$a_n = A(-2)^n + B\,3^n$$

- Como $g(n) = -6n^2 + 26n - 25$ es un polinomio de grado $r = 2$, entonces $P(n)$ es un polinomio de grado ≥ 2

Probamos una solución particular de la forma

$$P(n) = a\,n^2 + b\,n + c$$

que sustituida en la relación de recurrencia resulta

$$\begin{cases} a = 7a - 6 \\ b = -26a + 7b + 26 \\ c = 25a - 13b + 7c - 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

luego, la solución particular de la recurrencia es $P(n) = n^2$

- La solución general de la ecuación no homogénea es

$$a_n = A\,(-2)^n + B\,3^n + n^2$$

- Las condiciones iniciales son $\begin{cases} a_0 = 5 = A + B \\ a_1 = 1 = -2A + 3B + 1 \end{cases}$

por tanto, la solución de la recurrencia es

$$\boxed{a_n = (-2)^n\,3 + 3^n\,2 + n^2}$$

Ejemplos

2) Sea la recurrencia lineal no homogénea

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n \end{cases}$$

- La relación de recurrencia lineal homogénea $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

  tiene como polinomio característico $f(x) = x^2 - x - 6$

  cuyas raíces son $\alpha = -2,\ \beta = 3$

  entonces la solución general de la recurrencia homogénea es

$$a_n = A(-2)^n + B\,3^n$$

- Como $g(n) = 2^n$ y $b = 2$ no es raíz del polinomio característico probaremos con una solución particular de la forma $P(n) = c \cdot 2^n$

que sustituida en la recurrencia resulta

$$c2^n = c2^{n-1} + 6c2^{n-2} + 2^n \qquad \Rightarrow \qquad c = -1$$

Luego, la solución particular de la recurrencia es $P(n) = -2^n$

- La solución general de la ecuación no homogénea es

$$a_n = A\,(-2)^n + B\,3^n - 2^n$$

- Las condiciones iniciales son

$$\begin{cases} a_0 = A + B - 1 = 0 \\ a_1 = -2A + 3B - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 0,\ B = 1$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es $\boxed{a_n = 3^n - 2^n}$

Ejemplos

3) Sea la recurrencia lineal no homogénea

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n \end{cases}$$

- La relación de recurrencia lineal homogénea $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

  tiene como polinomio característico $f(x) = x^2 - x - 6$

  cuyas raíces son $\alpha = -2,\ \beta = 3$

  entonces la solución general de la recurrencia homogénea es

$$a_n = A(-2)^n + B\,3^n$$

- Como $g(n) = 3^n$ y $b = 3$ es raíz del polinomio característico, probaremos con una solución particular de la forma $P(n) = c\, n\, 3^n$

que sustituida en la recurrencia resulta

$$c\, n\, 3^n = c\,(n-1)\,3^{n-1} + 6\,c\,(n-2)\,3^{n-2} + 3^n$$

cuya solución es $c = 3/5$.

Luego, la solución particular es $P(n) = \dfrac{3^{n+1}\, n}{5}$

- La solución general de la ecuación no homogénea es

$$a_n = A(-2)^n + B3^n + \frac{3^{n+1}n}{5} = A(-2)^n + \left(B + \frac{3n}{5}\right)3^n$$

- Las condiciones iniciales son

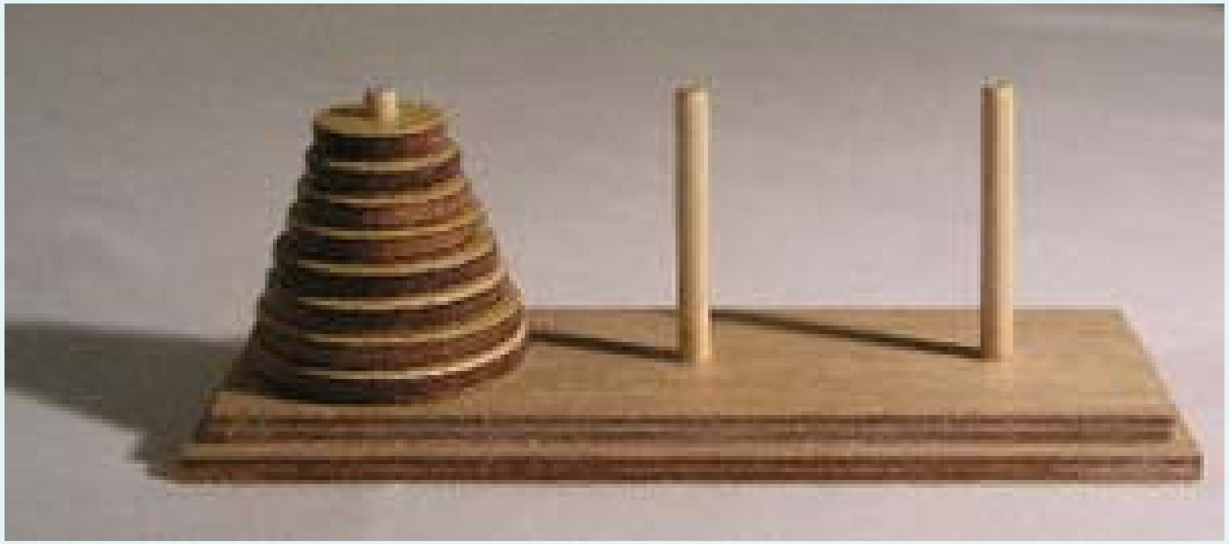
$$\begin{cases} a_0 = A + B = 0 \\ a_1 = -2A + \left(\dfrac{3}{5} + B\right)3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{4}{25},\ B = -\frac{4}{25}$$

Por tanto, la solución de la recurrencia es

$$\boxed{a_n = \frac{4}{25}(-2)^n + \left(\frac{15n-4}{25}\right)3^n}$$

Ejemplo: Torres de Hanoi

- *Es un juego formado por tres varillas verticales y un número indeterminado de discos distintos, colocados de mayor a menor en la primera varilla.*
- *El juego consiste en pasar todos los discos a otra varilla, con la condición de que no se puede colocar ningún disco mayor sobre uno menor.*
- *¿Cuál es el mínimo número de movimientos a_n que son necesarios para trasladar n discos?*



Solución:

El mínimo número de movimientos a_n verifica la relación de recurrencia

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1 \end{cases}$$

- La relación de recurrencia lineal homogénea $a_n = 2a_{n-1}$

  tiene como polinomio característico $p(x) = x - 2$

  cuya raíz es $\alpha = 2$

entonces la solución general de la ecuación homogénea es

$$a_n = A\, 2^n$$

- Probamos una solución particular de la forma $P(n) = c$

  que sustituida en la recurrencia resulta $c = 2c + 1$

  cuya solución es $c = -1$.

  Luego, la solución particular es $P(n) = -1$

  - La solución general de la ecuación no homogénea es

$$a_n = A\,2^n - 1$$

  - Las condiciones iniciales son $a_1 = 1 = A\,2 - 1 \Rightarrow A = 1$

Por tanto, la solución de la recurrencia es $\boxed{a_n = 2^n - 1}$